

1.— Para cada  $a \in \mathbb{R}$  se considera una forma cuadrática  $w : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , definida como:

$$w(x, y, z) = x^2 - ay^2 + 2axz + 2yz$$

- (a) Clasificar  $w$  en función de  $a$  indicando además el rango y la signatura. ¿Para qué valores de  $a$  es  $w$  un producto escalar?.
- (b) Para aquellos valores de  $a$  para los cuales  $w$  es degenerada, dar un vector autoconjugado que no esté en el núcleo.
- (c) Para  $a = 0$  dar una base de vectores conjugados.

(1.2 puntos)

---

2.— En  $\mathbb{R}^3$  se considera un producto escalar  $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  cumpliendo:

- Los subespacios vectoriales  $\mathcal{L}\{(0, 0, 1)\}$  y  $\mathcal{L}\{(1, 1, 0), (1, 0, 1)\}$  son ortogonales.
- Los vectores  $(1, 1, 0)$  y  $(1, 0, 1)$  forman un ángulo de  $\pi/3$ .
- Los tres vectores anteriores son unitarios.

- (i) Calcular la matriz de Gram del producto escalar respecto de la base canónica.
- (ii) Dado  $U = \mathcal{L}\{(1, 1, 1)\}$  calcular una base de su subespacio ortogonal  $U^\perp$  respecto al producto escalar dado.

(1 punto)

---

3.— En el plano euclídeo  $\mathbb{R}^2$  y dados  $a, b, c > 0$  se considera un endomorfismo  $t$  de matriz asociada respecto a la base canónica:

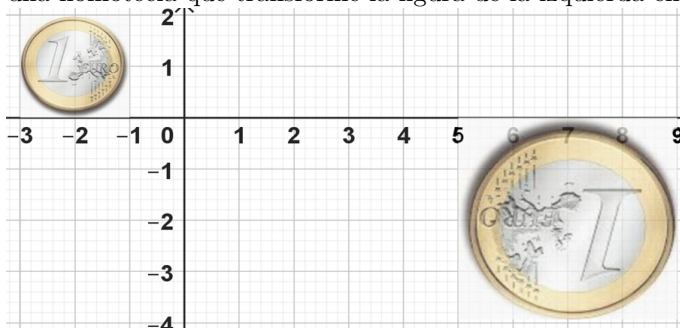
$$T_C = \begin{pmatrix} a & 4/5 \\ b & -c \end{pmatrix}$$

Hallar  $a, b, c$  para que  $t$  sea una transformación ortogonal. Clasificarla y describirla geoméricamente.

(1 punto)

---

4.— Dar la ecuación de una homotecia que transforme la figura de la izquierda en la de la derecha:



Indica cuál su centro y la razón.

(1 punto)

5.— Razona la veracidad o falsedad de las siguientes cuestiones:

- (a) Si  $w : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  es una forma cuadrática degenerada e indefinida, entonces  $\text{rango}(w) = 2$ .
- (b) Si  $w : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  es una forma cuadrática no degenerada e indefinida y  $F_C$  es su matriz asociada, entonces  $\det(F_C) < 0$ .
- (c) Si  $G_C$  es la matriz de Gram de un producto escalar, puede ocurrir que  $\text{traza}(G_C) = 0$ .
- (d) Si  $G_C$  es la matriz de Gram de un producto escalar, todos sus elementos son positivos.

(1.2 puntos)

6.— En el espacio afín  $\mathbb{R}^3$  se considera el tetraedro de vértices  $A = (0, 0, 0)$ ,  $B = (1, 0, 0)$ ,  $C = (0, 1, 1)$ ,  $D = (2, 1, 0)$ .

- (i) Hallar el ángulo que forman las caras  $ABC$  y  $ABD$ .
- (ii) Hallar la superficie y el volumen del tetraedro.
- (iii) Hallar la proyección ortogonal del vértice  $D$  sobre el plano  $ABC$ .

(1.5 puntos)

7.— En el plano afín se considera la cónica de ecuación:

$$xy - 2x - y + 1 = 0$$

- (i) Clasificar la cónica y hallar su ecuación reducida.
- (ii) Hallar su centro, ejes, asíntotas, vértices y excentricidad.
- (iii) Sabiendo que  $x - 2y + 2 = 0$  es la recta polar de un punto  $P$  respecto a esta cónica, hallar las coordenadas de  $P$ .

(1.5 puntos)

8.— Hallar la ecuación de una parábola sabiendo que tiene por vértice el punto  $(2, 3)$  y por directriz la recta de ecuación  $x + 3y - 1 = 0$ .

(1 punto)

9.— Dada la cuádrlica de ecuación:

$$x^2 + 2y^2 + 2xy + 2xz + 2y + 4 = 0$$

clasificar la superficie y esbozar un dibujo de la misma.

(0.6 puntos)

1.— Para cada  $a \in \mathbb{R}$  considérase unha forma cuadrática  $w : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , definida como:

$$w(x, y, z) = x^2 - ay^2 + 2axz + 2yz$$

- (a) Clasificar  $w$  en función de  $a$ , indicando ademais o rango e a sinatura. Para que valores de  $a$  é  $w$  un produto escalar?
- (b) Para aqueles valores de  $a$  para os cales  $w$  é dexenerada, dar un vector autoconxugado que non estea no núcleo.
- (c) Para  $a = 0$  dar unha base de vectores conxugados.

(1.2 puntos)

---

2.— En  $\mathbb{R}^3$  considérase un produto escalar  $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  que cumpre:

- Os subespazos vectoriais  $\mathcal{L}\{(0, 0, 1)\}$  e  $\mathcal{L}\{(1, 1, 0), (1, 0, 1)\}$  son ortogonais.
- Os vectores  $(1, 1, 0)$  e  $(1, 0, 1)$  forman un ángulo de  $\pi/3$ .
- Os tres vectores anteriores son unitarios.

- (i) Calcular a matriz de Gram do produto escalar respecto da base canónica.
- (ii) Dado  $U = \mathcal{L}\{(1, 1, 1)\}$ , calcular unha base do seu subespazo ortogonal  $U^\perp$  respecto ao produto escalar dado.

(1 punto)

---

3.— No plano euclídeo  $\mathbb{R}^2$  e dados  $a, b, c > 0$  considérase un endomorfismo  $t$  de matriz asociada respecto da base canónica:

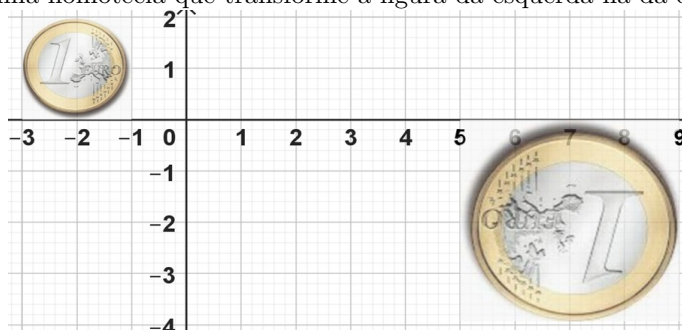
$$T_C = \begin{pmatrix} a & 4/5 \\ b & -c \end{pmatrix}$$

Atopar  $a, b, c$  para que  $t$  sexa unha transformación ortogonal. Clasifícala e describirla xeométricamente a transformación.

(1 punto)

---

4.— Dar a ecuación dunha homotecia que transforme a figura da esquerda na da dereita:



Indica cal é o seu centro e a razón.

(1 punto)

---

5.— Razoar a veracidade ou falsidade das seguintes cuestións:

- (a) Se  $w : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  é unha forma cuadrática dexenerada e indefinida, entón  $\text{rango}(w) = 2$ .
- (b) Se  $w : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  é unha forma cuadrática non dexenerada e indefinida e  $F_C$  é a súa matriz asociada, entón  $\det(F_C) < 0$ .
- (c) Se  $G_C$  é a matriz de Gram dun produto escalar, pode ocorrer que  $\text{traza}(G_C) = 0$ .
- (d) Se  $G_C$  é a matriz de Gram dun produto escalar, todos os seus elementos son positivos.

(1.2 puntos)

6.— No espazo afín  $\mathbb{R}^3$  considérase o tetraedro de vértices  $A = (0, 0, 0)$ ,  $B = (1, 0, 0)$ ,  $C = (0, 1, 1)$ ,  $D = (2, 1, 0)$ .

- (i) Atopar o ángulo que forman as caras  $ABC$  e  $ABD$ .
- (ii) Atopar a superficie e o volume do tetraedro.
- (iii) Atopar a proxección ortogonal do vértice  $D$  sobre o plano  $ABC$ .

(1.5 puntos)

7.— No plano afín considérase a cónica de ecuación:

$$xy - 2x - y + 1 = 0$$

- (i) Clasificar a cónica e atopar a súa ecuación reducida.
- (ii) Atopar o seu centro, eixes, asíntotas, vértices e excentricidade.
- (iii) Sabendo que  $x - 2y + 2 = 0$  é a recta polar dun punto  $P$  respecto desta cónica, atopar as coordenadas de  $P$ .

(1.5 puntos)

8.— Atopar a ecuación dunha parábola sabendo que ten por vértice o punto  $(2, 3)$  e por directriz a recta de ecuación  $x + 3y - 1 = 0$ .

(1 punto)

9.— Dada a cuádrica de ecuación:

$$x^2 + 2y^2 + 2xy + 2xz + 2y + 4 = 0$$

clasificar a superficie e facer un debuxo esquemático da mesma.

(0.6 puntos)