EJERCICIO 1

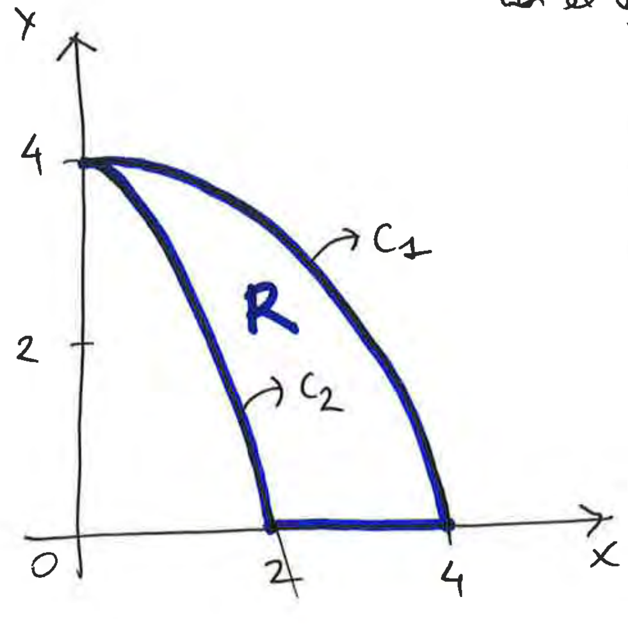
ⓐ Dibujar R y calcular su área.

- Para dibujar R, primero identificamos y estudiamos las curvas que delimitan esta región del plano en $x \geq 0, y \geq 0$.

- C_1: $x^2+y^2=16 \rightarrow$ Circunferencia de radio 4 unidades.
  - Forma explícita: $y = +\sqrt{16-x^2}$
  - $\cap OX \rightarrow y=0 \rightarrow x=+\sqrt{16}=4 \quad (x\geq 0)$
  - $\cap OY \rightarrow x=0 \rightarrow y=+\sqrt{16}=4 \quad (y\geq 0)$

- C_2: $y = 4-x^2 \rightarrow$ Parábola de eje vertical.
  - $\cap OX$: $4-x^2=0 \rightarrow x=\pm 2,\ y=0$
  - $\cap OY$: $x=0 \rightarrow y=4$
  - Extremos relativos: $\frac{dy}{dx}=0 \rightarrow -2x=0 \rightarrow x=0,\ y=4$

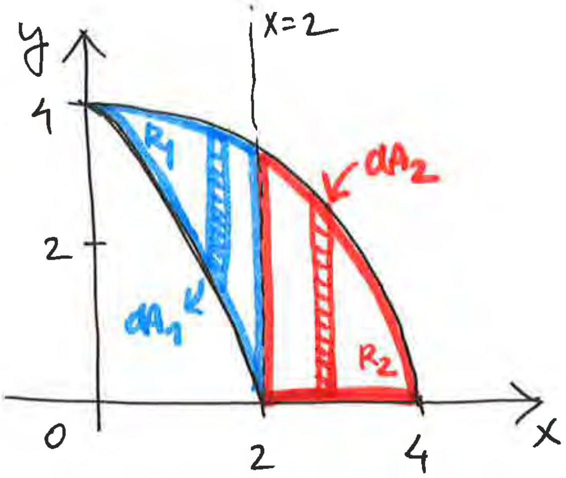
    $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0} = -2 < 0 \rightarrow$ Máximo
  - NOTA: Observamos que el máximo de C_2 coincide con el corte de C_1 con el eje Y, luego C_1 y C_2 se tocan en ese punto.



- En base al estudio de las dos curvas anteriores, dibujamos el recinto R como se ve en la figura de la izquierda.

- Opción 1: Cálculo del área de R con $dA \parallel OY$.

- Dividimos R en dos subregiones R_1 y R_2 delimitados por distintas curvas y definimos dA_1 y dA_2 respectivamente.



- $dA_1 = (y_{C_1} - y_{C_2})\,dx$
$= \left(\sqrt{16-x^2} - 4 + x^2\right)dx$

- $dA_2 = y_{C_1}\,dx$
$= \sqrt{16-x^2}\,dx$

- Por tanto, calculamos el área de R como:

$$A = A_1 + A_2 = \int_{x_1=0}^{x_2=2} dA_1 + \int_{x_1=2}^{x_2=4} dA_2 = \int_0^2 \left(\sqrt{16-x^2} - 4 + x^2\right)dx + \int_2^4 \sqrt{16-x^2}\,dx$$

$$= \int_0^4 \sqrt{16-x^2}\,dx - \int_0^2 (4-x^2)\,dx = I_1 - I_2$$

$$I_1 = \int_0^4 \sqrt{16-x^2}\,dx = \left\{ \begin{array}{l} \underline{\text{Cambio de variable}} \\ x = 4\,\mathrm{sen}\,t \to t = \arcsin\frac{x}{4} \\ dx = 4\cos t\,dt \end{array} \right\} = \int_{t_1=0}^{t_2=\frac{\pi}{2}} \sqrt{16 - 16\,\mathrm{sen}^2 t}\; 4\cos t\,dt$$

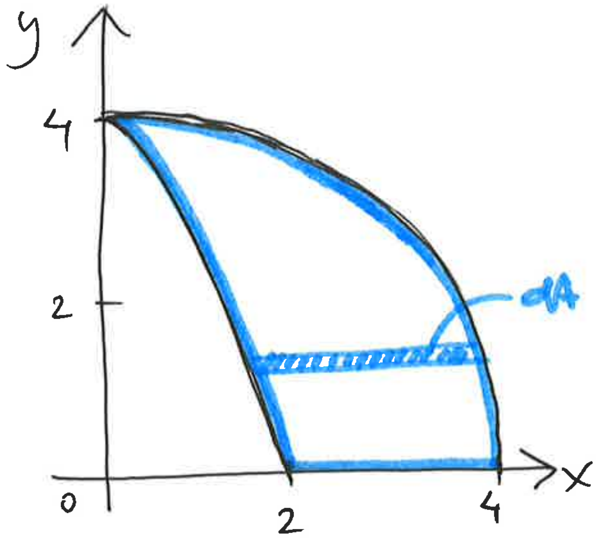
$$= 16 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\mathrm{sen}^2 t}\,\cos t\,dt = 16 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt = 16 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt$$

$$= 8\left[t + \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}\,2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 4\pi$$

$$I_2 = \int_0^2 (4-x^2)\,dx = \left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 = 8 - \frac{8}{3} = \frac{16}{3}$$

$$\boxed{A = 4\pi - \frac{16}{3} = \frac{12\pi - 16}{3}}$$

- Opción 2 : Cálculo del área de R con dA ∥ OX.



- Calculamos dA siguiendo el procedimiento general:

$$dA = (x_{c_1} - x_{c_2})\,dy$$
$$= \left(\sqrt{16-y^2} - \sqrt{4-y}\right)dy$$

- Por tanto, calculamos A mediante integración como sigue:

$$A = \int_{y_1=0}^{y_2=4} dA = \int_0^4 \left(\sqrt{16-y^2} - \sqrt{4-y}\right)dy$$
$$= \int_0^4 \sqrt{16-y^2}\,dy - \int_0^4 \sqrt{4-y}\,dy = I_1 - I_2$$

$I_1 = 4\pi$ (Idem a I_1 en opción 1)

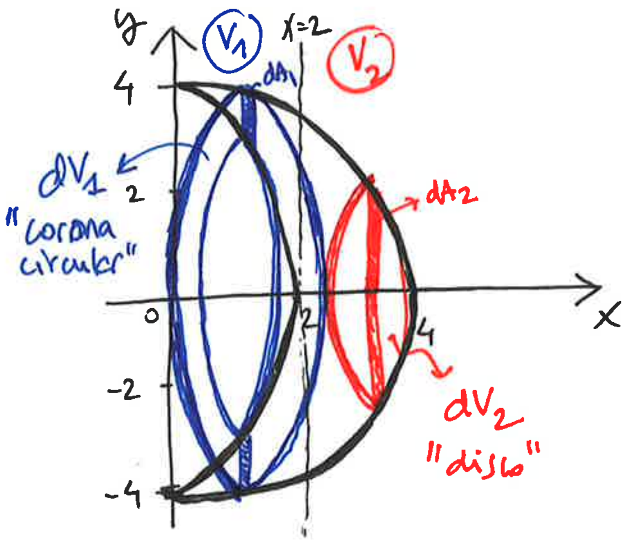
$$I_2 = \int_0^4 \sqrt{4-y}\,dy = \left[-\frac{2}{3}(4-y)^{\frac{3}{2}}\right]_0^4 = \frac{2}{3}4^{\frac{3}{2}} = \frac{16}{3}$$

$$\boxed{A = 4\pi - \frac{16}{3} = \frac{12\pi - 16}{3}}$$

(b) Plantear el cálculo por integración del volumen que genera R al girar alrededor de OX.

- Opción 1: $dA \parallel OY$.

- Análogamente a cómo calculamos el área de R siguiendo esta estrategia de cálculo, dividimos el volumen de revolución en dos partes y definimos dV_1 y dV_2.



- $dV_1 = \pi\left(y_{C_1}^2 - y_{C_2}^2\right)dx$
$= \pi\left(16 - x^2 - (4-x^2)^2\right)dx$
$= \pi\left(16 - x^2 - 16 - x^4 + 8x^2\right)dx$
$= \pi\left(7x^2 - x^4\right)dx$

- $dV_2 = \pi y_{C_1}^2\, dx = \pi\left(16 - x^2\right)dx$

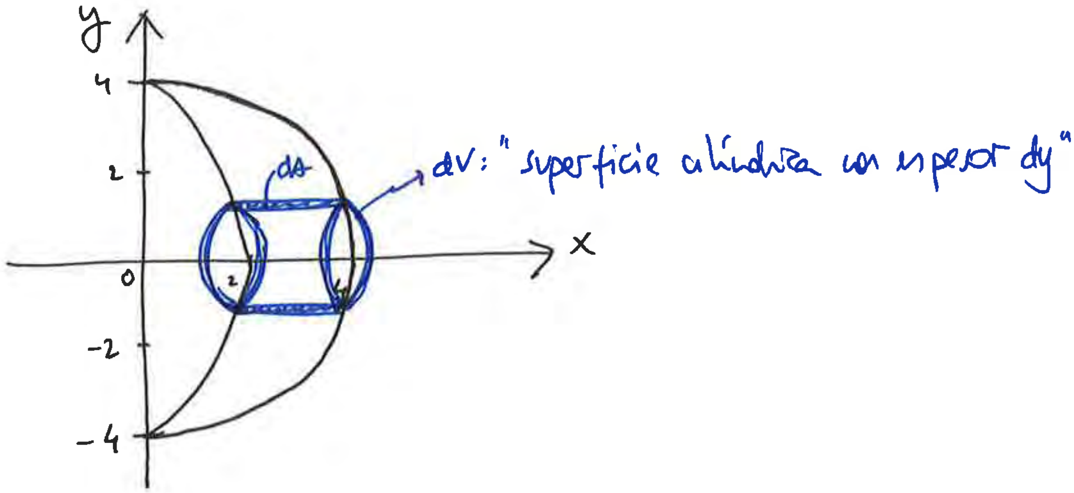
Por tanto:

$$V = V_1 + V_2 = \int_{x_1=0}^{x_2=2} dV_1 + \int_{x_1=2}^{x_2=4} dV_2$$

$$\boxed{= \int_0^2 \pi\left(7x^2 - x^4\right)dx + \int_2^4 \pi\left(16 - x^2\right)dx}$$

- Opción 2: $dA \parallel OX$

De forma similar a cómo calculamos el área de R con esta estrategia, basta definir un único dV.



Así:

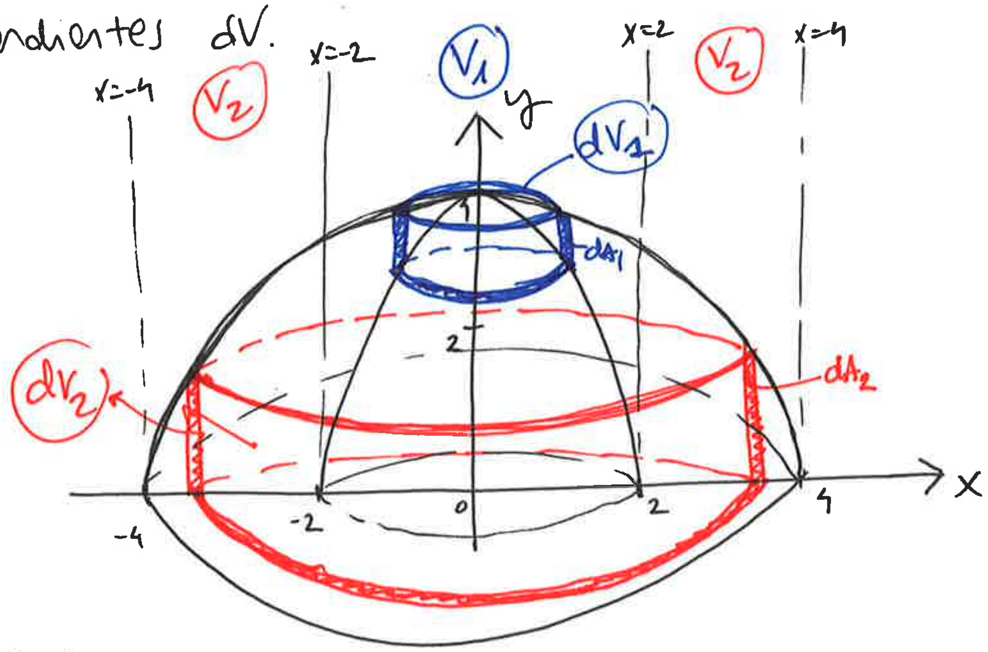
$$dV = 2\pi y\,(x_{c_2} - x_{c_1})\,dy = 2\pi y\left(\sqrt{16-y^2} - \sqrt{4-y}\right)dy$$

$$\boxed{V = \int_{y_1=0}^{y_2=4} dV = \int_0^4 2\pi y\left(\sqrt{16-y^2} - \sqrt{4-y}\right)dy}$$

(c) Plantear el cálculo por integración del volumen que genera R al girar alrededor de OY.

- Opción 1: $dA \parallel OY$

Como en la opción 1 de los dos apartados anteriores, necesitamos dividir el cálculo del volumen en dos subvolúmenes con sus correspondientes dV.



Por tanto

- $dV_1 = 2\pi x \left(y_{c_1} - y_{c_2}\right) dx = 2\pi x \left(\sqrt{16-x^2} - 4 + x^2\right) dx$
- $dV_2 = 2\pi x \, y_{c_1} \, dx = 2\pi x \sqrt{16-x^2} \, dx$

Entonces:

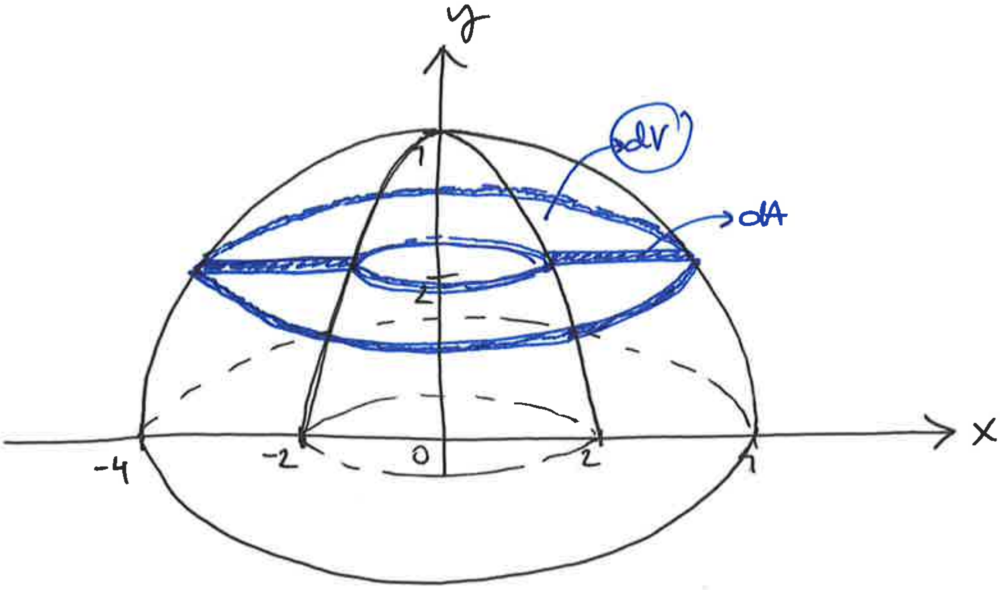
$$V = \int_{x_1=0}^{x_2=2} dV_1 + \int_{x_1=2}^{x_2=4} dV_2$$

$$V = \int_0^2 2\pi x \left(\sqrt{16-x^2} - 4 + x^2\right) dx + \int_2^4 2\pi x \sqrt{16-x^2} \, dx$$

$$\boxed{V = \int_0^4 2\pi x \sqrt{16-x^2} \, dx - \int_0^2 2\pi x \left(4 - x^2\right) dx}$$

- **Opción 2: $dA \parallel OX$**

Como en la opción 2 de los apartados anteriores, basta definir un solo dV e integrarlo.



Por tanto:

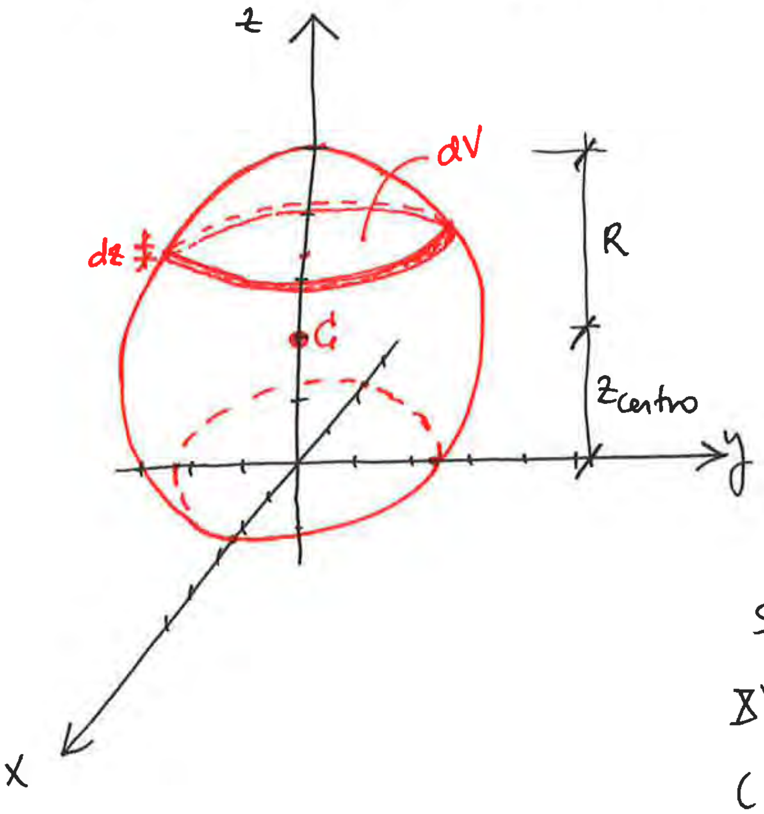
- $dV = \pi \left(x_{C_1}^2 - x_{C_2}^2 \right) dy = \pi \left(\left(\sqrt{16-y^2} \right)^2 - \left(\sqrt{4-y} \right)^2 \right) dy$

$= \pi \left(16 - y^2 - 4 + y \right) dy = \pi \left(12 + y - y^2 \right) dy$

- $\boxed{V = \int_{y_1=0}^{y_2=4} dV = \int_0^4 \pi \left(12 + y - y^2 \right) dy}$

EJERCICIO 2

- La superficie $S: x^2+y^2+(z-2)^2=9$ es una esfera de centro $C(0,0,2)$ y radio $R=3$. Su corte con el plano XY (i.e., $z=0$) es la circunferencia $x^2+y^2=5$, con centro el origen y radio $r_0=\sqrt{5}$. Representamos gráficamente el volumen a calcular:



- Podemos calcular el volumen pedido usando rebanadas diferenciales de volumen dV dado por:

$$dV = S(z)\,dz$$

con

$$S(z) = \pi r^2(z)$$

y $r(z)$ siendo el radio de las secciones circulares paralelas al plano XY entre $z_1=0$ (plano XY) y $z_2=5$ (i.e., $z_2 = z_{centro}+R$).

- La ecuación de la circunferencia de las secciones de la esfera paralelas al plano XY es $x^2+y^2=9-(z-2)^2$. Luego, obtenemos:

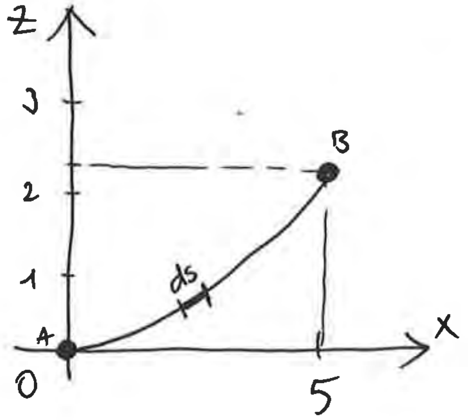
$$r(z)=\sqrt{9-(z-2)^2} \rightarrow S(z)=\pi r^2(z)=\pi\left(9-(z-2)^2\right)$$

- Por tanto:

$$\boxed{V=\int_{z_1=0}^{z_2=5} dV = \int_0^5 \pi\left(9-(z-2)^2\right)dz = \pi\left[9z-\frac{1}{3}(z-2)^3\right]_0^5 = \dots = \frac{100\pi}{3}}$$

EJERCICIO 3

ⓐ El tiempo que tarda el tranvía en recorrer la vía entre $x=0$ y $x=5$ km viene dado como $t=\frac{s}{v}$, donde s es la longitud de arco que describe la vía entre los puntos con $x=0$ y $x=5$ km y v es la velocidad del tranvía. Dado que v es dato, basta calcular la longitud de arco s. Como el trazado en planta es rectilíneo y la cota $z=z(x)$ podemos trabajar en el plano XZ:



Punto A: $x=0 \rightarrow z=0$

Punto B: $x=5 \rightarrow z=0.2\,5^{1.5} \simeq 2.236$

Diferencial de arco:

$$ds=\sqrt{dx^2+dz^2}=\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\,dx$$

$$=\sqrt{1+(0.3x^{0.5})^2}\,dx=\sqrt{1+0.09x}\,dx$$

Por tanto:

$$\boxed{s=\int_{x_1=0}^{x_2=5} ds=\int_0^5\sqrt{1+0.09x}\,dx=\left[\frac{2}{3\cdot 0.09}(1+0.09x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^5=\frac{200}{27}\left(1.45^{1.5}-1\right)\simeq 5.53\text{ km}}$$

Y entonces:

$$\boxed{t=\frac{s}{v}=\frac{50}{81}\left(1.45^{1.5}-1\right)\simeq 0.46\,h\ (\simeq 27.63\text{ min})}$$

(b) Si las ruedas tienen un radio de 0.5 m y ruedan sin deslizar sobre la vía, el número de vueltas que da cada una de ellas durante el ascenso es:

$$n = \frac{s}{P}$$, donde $P = 2\pi\, 0.5 = \pi$ m es el perímetro de cada rueda.

Por tanto:

$$\boxed{n = \frac{200}{27}\left(1.45^{1.5} - 1\right)\frac{1000}{\pi} = \frac{200\,000}{27\pi}\left(1.45^{1.5} - 1\right) \simeq 1759 \text{ vueltas}}$$

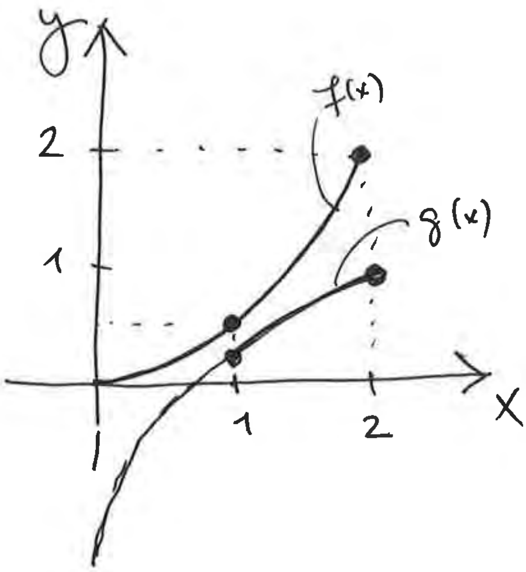
EJERCICIO 4

ⓐ Hallar el área entre la curva dada, el eje de abscisas y las rectas $x=1$ y $x=2$.

No es trivial dibujar la curva $y = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{4}\ln x$.

No obstante, podemos analizar su expresión en $1 \le x \le 2$ para comprobar si $y \geq 0$ en ese intervalo, lo que garantizará que $dA = y\,dx \geq 0$ también.

Si escribimos $y = f(x) - g(x)$ con $f(x) = \frac{x^2}{2}$ y $g(x) = \frac{1}{4}\ln x$, y representamos gráficamente estas funciones, obtenemos:



Dado que $f(1) > g(1)$ y que $f(x)$ crece más rápido que $g(x)$ por ser $f(x)$ potencial y $g(x)$ logarítmica, deducimos que $y = f(x) - g(x) > 0 \ \forall x \in [1,2]$

Por tanto, podemos plantear el cálculo del área como:

$$A = \int_{x_1=1}^{x_2=2} dA = \int_1^2 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{4}\ln x\right)dx = \frac{1}{2}\int_1^2 x^2\,dx - \frac{1}{4}\int_1^2 \ln x\,dx$$

$$= I_1 - I_2$$

$$I_1 = \frac{1}{2}\int_1^2 x^2\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{7}{6}$$

$$I_2 = \frac{1}{4}\int_1^2 \ln x\,dx = \left\{\begin{array}{l}\underline{\text{cambio de variable}}\\ t=\ln x \to x=e^t\\ dx = e^t dt\end{array}\right\}$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{\ln 2} t e^t dt = \left\{\begin{array}{l}\underline{\text{por partes}}\\ u=t \to du=dt\\ dv=e^t dt \to v=e^t\end{array}\right\}$$

$$= \frac{1}{4}\left[te^t\right]_0^{\ln 2} - \frac{1}{4}\int_0^{\ln 2} e^t dt = \frac{1}{4}\left[te^t - e^t\right]_0^{\ln 2}$$

$$= \frac{1}{4}(2\ln 2 - 2 + 1) = \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{4}$$

Entonces:

$$\boxed{A = \frac{7}{6} - \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{4} = \frac{17 - 6\ln 2}{12}}$$

(b) Calcular la longitud del arco.

Procediendo de forma estándar:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \sqrt{1 + \left(x - \frac{1}{4x}\right)^2}\,dx = \sqrt{1 + \left(\frac{4x^2-1}{4x}\right)^2}\,dx$$

$$= \sqrt{\frac{16x^2 + 16x^4 - 8x^2 + 1}{16x^2}}\,dx = \sqrt{\frac{16x^4 + 8x^2 + 1}{16x^2}} = \sqrt{\frac{(4x^2+1)^2}{(4x)^2}}\,dx$$

$$= \frac{4x^2+1}{4x}\,dx = \left(x + \frac{1}{4x}\right)dx$$

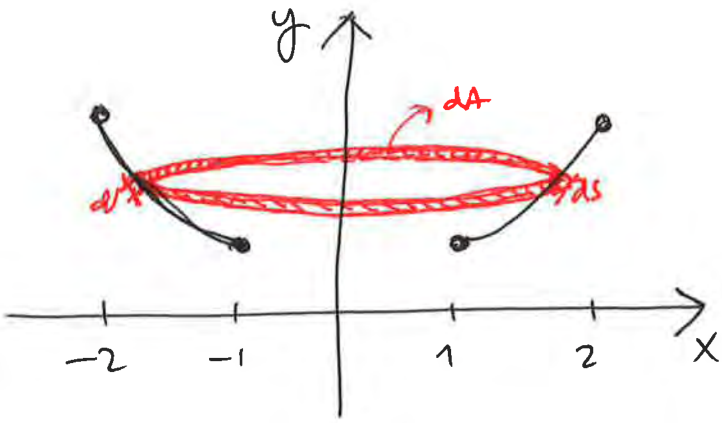
Por tanto:

$$\boxed{S = \int_{x_1=1}^{x_2=2} ds} = \int_1^2 \left(x + \frac{1}{4x}\right) dx = \left[\frac{x^2}{2} + \frac{1}{4}\ln x\right]_1^2$$

$$= 2 + \frac{1}{4}\ln 2 - \frac{1}{2} = \boxed{\frac{6+\ln 2}{4}}$$

(c) Área de la superficie al girar el arco en torno a OY

Dado que en el apartado (a) dedujimos que $y = y(x)$ es una función monótona creciente con $y(x) > 0$ en $1 \leq x \leq 2$, podemos aproximar su gráfica como se muestra en la figura siguiente y calcular el área pedida de forma estándar:



$$dA = 2\pi x \, ds$$
$$= 2\pi \left(x^2 + \frac{1}{4}\right) dx$$

Por tanto:

$$\boxed{A = \int_{x_1=1}^{x_2=2} dA} = \int_1^2 2\pi \left(x^2 + \frac{1}{4}\right) dx = 2\pi \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x}{4}\right]_1^2 = \ldots = \boxed{\frac{31\pi}{6}}$$